Jouons avec les nombres d'une suite de Fibonacci

Après un petit rappel historique sur la suite de Fibonacci, Dominique Souder nous présente trois tours de mathémagie sous forme de fiches « prêtes à l'emploi », où cette jolie suite vous fera briller à tous les coups.

Dominique Souder

La suite de Fibonacci

À propos de la succession des nombres 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, etc.

Vers l'an 1200, Leonardo Fibonacci se pose la question suivante : combien de couples de lapins pouvons-nous obtenir à la fin d'une année si, commençant en début du premier mois avec un seul couple, chacun des couples, après deux mois d'existence, produit chaque début de mois un nouveau couple ?

Si on note u_n le nombre de couples de lapins au début du mois n ($n \geqslant 1$), l'énoncé dit que $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, puis $u_3 = 2$ (puisque le couple n° 1 va en produire un autre, appelé le couple n° 2, au début du troisième mois). Il suit $u_4 = 2 + 1 = 3$ (le couple n° 1 produit un autre couple (couple n° 3), mais le couple n° 2 ne produit encore rien). Ensuite u_5 est la somme du nombre de couples existant au début du quatrième mois augmenté du nombre de couples producteurs au début de ce cinquième mois, mais les couples producteurs sont ceux ayant au moins deux mois d'existence, c'est-à-dire u_3, et ainsi $u_5 = u_4 + u_3 = 3 + 2 = 5$. On peut généraliser ce raisonnement : à partir de $n = 3$, le nombre u_n est le total du nombre de couples existant déjà au début du $(n-1)$-ième mois et du nombre de couples producteurs au début de ce n-ième mois ; or les couples producteurs sont ceux ayant au moins deux mois d'existence, c'est-à-dire u_{n-2}, et ainsi : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. En résumé, un effectif de couples de lapins est la somme des effectifs des deux mois précédents. En appliquant cette formule, on obtient après les termes précédents, successivement $u_6 = 8$, $u_7 = 13$, $u_8 = 21$, $u_9 = 34$, $u_{10} = 55$, $u_{11} = 89$, etc.

Cette suite n'est pas arithmétique (la différence entre deux termes successifs n'est pas constante), ni géométrique (le quotient d'un terme par le terme précédent n'est pas constant). Cependant ce dernier rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ semble se « stabiliser » vers un nombre approximativement égal à $1{,}618$: $\dfrac{u_2}{u_1} = 1$;
$\dfrac{u_3}{u_2} = 2$; $\dfrac{u_4}{u_3} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$; $\dfrac{u_5}{u_4} = \dfrac{5}{3} = 1{,}666\ldots$; $\dfrac{u_6}{u_5} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$; $\dfrac{u_7}{u_6} = \dfrac{13}{8} = 1{,}625$; $\dfrac{u_8}{u_7} = \dfrac{21}{13} = 1{,}615\ldots$;
$\dfrac{u_9}{u_8} = \dfrac{34}{21} = 1{,}619\ldots$; $\dfrac{u_{10}}{u_9} = \dfrac{55}{34} = 1{,}617\ldots$; $\dfrac{u_{11}}{u_{10}} = \dfrac{89}{55} = 1{,}618\ldots$; $\dfrac{u_{12}}{u_{11}} = \dfrac{144}{89} = 1{,}617\ldots$

On démontre que la limite en $+\infty$ de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est le nombre d'or dont le développement décimal commence par $1{,}618\,033\,9\ldots$ Autrement dit, pour n grand, la suite de Fibonacci est « presque » géométrique : on passe d'un terme au suivant en le multipliant par un nombre « presque » égal au nombre d'or. La valeur exacte du nombre d'or est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Fiche de mathémagie nº 1

Les deux premiers nombres de votre « Fibo-suite » de 14 nombres

Le tour

Le magicien a préparé sur une feuille de papier une rangée de 14 cases vides dans lesquelles des nombres seront écrits par son spectateur préféré :

Le spectateur est invité à penser à deux nombres entiers strictement positifs et inférieurs ou égaux à 9 (ils peuvent être distincts ou non) puis, en cachette du magicien, à les écrire dans les deux premières cases de gauche. Ensuite, à partir de la troisième case, il doit écrire dans chaque case le total des nombres des deux cases précédentes (ce qui rappelle la construction de la suite de Fibonacci).

Voici un exemple, à partir du choix de départ 7 et 3 :

7	3	10	13	23	36	59	95	154	249	403	652	1 055	1 707

Sans voir ce qui est écrit, le magicien l'interroge :

« *Quel est le nombre écrit dans la* 13ᵉ *case à partir de la gauche (l'avant-dernière à droite) sur cette première ligne ? Et dans la* 14ᵉ *case (la dernière à droite) ?* »

Le magicien donne alors, dans l'ordre, les deux premiers nombres choisis par le spectateur (c'est-à-dire ici les nombres 7 et 3).

Le « truc » du mathémagicien

Voici ce que fait le magicien quand le spectateur va lui donner la valeur de la 13ᵉ case : il additionne les chiffres du nombre. Dans notre exemple, à partir de 1 055, il trouve $1 + 0 + 5 + 5 = 11$.

Il a ensuite deux façons de parvenir à « deviner » les nombres cherchés :

Option 1 : il construit la série d'entiers allant de 9 en 9, contenant ce 11, et compris entre 1 et 72. C'est-à-dire la série 2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65. Il cherche le multiple de 8 qu'elle contient. Dans notre exemple, c'est 56.
Pour obtenir le premier nombre de la suite, il divise ce 56 par 8 et annonce « 7 ».
Option 2 : il construit une série décroissante d'entiers allant de 9 en 9 en partant de ce 11 : 11, 2, -7, -16, ... Pour obtenir le premier nombre choisi par le spectateur, il prend l'opposé du premier nombre strictement négatif de la série, et annonce donc « 7 ».

Le magicien procède de la même façon à partir de la 14ᵉ case pour obtenir le deuxième nombre choisi par le spectateur. Ici, $1 + 7 + 0 + 7 = 15$.

Option 1 : il construit la série 6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, 69, dans laquelle le seul multiple de 8 est 24 qui vaut 8×3.
Option 2 : il construit la série 15, 6, -3, -12, ... dans laquelle le premier nombre strictement négatif est -3.
Il annonce alors le deuxième nombre de la suite : « 3 ».

Explication mathématique

Si on note a le premier nombre choisi et b le second, on peut calculer tous les nombres suivants en fonction de a et b. Intéressons-nous à la case nº 13 qui vaut alors $(89a + 144b)$ et à la case nº 14 qui vaut $(144a + 233b)$. On sait qu'il est commode pour voir si un nombre entier est divisible par 9 de le remplacer par la somme de ses chiffres : si cette somme est divisible par 9 alors le nombre l'est aussi. De plus, quand le reste de la division par 9 n'est pas nul, le reste est le même que celui de la division de la somme des chiffres du nombre par 9. Remarquons que ce reste ne change pas quand on ajoute ou qu'on enlève 9 un certain nombre de fois. Ayons le courage d'écrire, après les deux premiers termes a et b de notre suite de Fibonacci, les quinze termes qui suivent, en enlevant de leur écriture des multiples de 9 ; on obtient ainsi une écriture simplifiée dans le tableau ci-dessous… Par exemple $(13a + 21b)$ est simplifié en $(4a + 3b)$ en soustrayant $9a$ et $18b$ qui sont des multiples de 9.

Numéro du terme	Valeur	Valeur simplifiée
1	a	a
2	b	b
3	$a + b$	$a + b$
4	$a + 2b$	$a + 2b$
5	$2a + 3b$	$2a + 3b$
6	$3a + 5b$	$3a + 5b$
7	$5a + 8b$	$5a + 8b$
8	$8a + 13b$	$8a + 4b$
9	$13a + 21b$	$4a + 3b$
10	$21a + 34b$	$3a + 7b$
11	$34a + 55b$	$7a + b$
12	$55a + 89b$	$a + 8b$
13	$89a + 144b$	$8a$
14	$144a + 233b$	$8b$
15	$233a + 377b$	$8a + 8b$
16	$377a + 610b$	$8a + 7b$
17	$610a + 987b$	$7a + 6b$

Les valeurs simplifiées des 13^{e} et 14^{e} cases sont $8a$ et $8b$ et l'on rappelle que a et b sont des entiers compris entre 1 et 9. Il suffit de connaître le reste de la division euclidienne de a et b par 9 pour pouvoir les identifier.

En utilisant le critère de divisibilité par 9, il faut alors additionner les chiffres du nombre écrit dans la 13^{e} case : dans notre exemple, $1 + 0 + 5 + 5 = 11$. Ensuite, on obtient la série d'entiers strictement positifs, allant de 9 en 9, contenant 11 et inférieurs ou égaux à 72, soit la série 2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65.

Deux possibilités de conclure à partir de là.

Option 1 : dans cette série, le seul nombre qui peut avoir la forme $8a$ (le seul multiple de a, avec a valant 9 au maximum) est 56 qui est égal à 8×7. D'où la solution $a = 7$.
Option 2 : on étend la série 2, 11, 20, 29, etc. aux entiers négatifs, en comptant toujours de 9 en 9 : -7, -16, etc. $8a$ et $-a$ diffèrent d'un multiple de 9, et $-a$ est compris entre -9 et -1, donc le premier nombre strictement négatif de cette série est l'opposé de a, ici -7. Donc $a = 7$.

On procède de même pour déterminer b à partir du nombre de la 14^{e} case, soit $1\,707$. Le magicien calcule $1+7+0+7=15$.

Option 1 : il envisage la série 6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, 69 dans laquelle le seul multiple de 8 est 24 qui vaut 8×3 donc $b=3$.
Option 2 : il envisage la série 15, 6, -3 ; $-b=-3$ donc $b=3$.

*
* *

* *
*

Fiche de mathémagie n° 2

Les deux *teen-agers* et leur « Fibo-suite » de 16 nombres

Le tour

Ce deuxième tour de magie doit être vanté comme étant encore plus fort que le premier.

Le magicien a préparé sur une feuille de papier une rangée de 16 cases vides dans lesquelles des nombres seront écrits par son spectateur préféré :

Le spectateur est invité à penser à l'âge de deux *teen-agers* (donc de 13 à 19 ans) mais on peut étendre à deux nombres entiers cette fois-ci compris entre 11 et 19 au sens large (distincts ou non) puis, en cachette du magicien, à les écrire dans les deux premières cases de gauche. Ensuite, à partir de la troisième case, il doit écrire dans chaque case la somme des nombres des deux cases précédentes.

Voici un exemple :

13	11	24	35	59	94	153	247	400	647	1 047	1 694	2 741	4 435	7 176	11 611

Sans voir ce qui est écrit, le magicien interroge le spectateur :

« *Quel est le nombre écrit dans la* 15^e *case à partir de la gauche (l'avant-dernière à droite) sur cette ligne ? Et dans la* 16^e *case (la dernière à droite) ?* »

Le magicien donne alors dans l'ordre les deux premiers nombres choisis par le spectateur (c'est-à-dire ici les nombres 13 et 11).

Le « truc » du mathémagicien

Dans la pratique, vous irez vite pour ce tour, et vous trouverez cela facile : le magicien griffonne sur un papier les deux valeurs données des cases numéros 15 (ici : $7\,176$) et 16 (ici : $11\,611$), il les remplace par la somme de leurs chiffres, puis enlève la somme obtenue à la case 16 à celle obtenue à la case 15 : ici, $21 - 10 = 11$; il obtient le deuxième nombre choisi par le spectateur.

Il ajoute enfin l'opposé de ce nombre et l'opposé de la somme obtenue en case 15. Puis en comptant de 9 en 9, il retrouve le premier nombre choisi par le spectateur, qui est entre 11 et 19. Dans notre exemple, $-11 - 21 = -32$ puis -32, -23, -14, -5, 4, 13, donc le nombre cherché est 13.

Explication mathématique

Intéressons-nous à la case n° 15 qui vaut alors $(233a + 377b)$ et à la case n° 16 qui vaut $(377a + 610b)$. Les valeurs simplifiées en ôtant les multiples de 9 sont $(8a + 8b)$ pour l'une et $(8a + 7b)$ pour l'autre. Si l'on soustrait la dernière case de l'avant-dernière on trouve b.

Dans l'exemple, le spectateur donne la valeur n° 15 qui est $7\,176$ et la valeur n° 16 qui est $11\,611$.

Le magicien simplifie en $7+1+7+6=21$, et en $1+1+6+1+1=10$. Il calcule $21-10=11$.

Il sait donc que $b=11$ (on rappelle que a et b doivent être des nombres compris entre 11 et 19 et, si l'on tombe en dehors de cet intervalle, on compte de 9 en 9 pour y arriver).

Comme dans le premier tour, le magicien a maintenant plusieurs possibilités pour trouver a.

Option 1 : observons la 17ᵉ case $(7a+6b)$ et comparons-la avec la 16ᵉ soit $(8a+7b)$. On a une différence de $(1a+1b)$ obtenue si on enlève la 17ᵉ case de la 16ᵉ ; ensuite en soustrayant b que l'on connaît déjà, on trouvera la valeur a. Le magicien ne connaît pas la valeur de la 17ᵉ case, mais il sait que c'est la somme de la 16ᵉ et de la 15ᵉ par construction du tableau. Dans l'exemple, après 21 et 10, ce sera $21+10=31$. Soustrayons la 17ᵉ case de la 16ᵉ. Dans l'exemple $10-31=-21$, c'est-à-dire le nombre opposé de la case nº 15 et ce n'est pas un hasard : c'est toujours le cas puisque $y-(x+y)=-x$.

Case 15	Case 16	Case 17
x	y	$x+y$

On a donc $a+b=-21$ et $b=11$ donc $a=-21-11=-32$. Il faut donc, pour trouver a, toujours calculer la somme de l'opposé de la 15ᵉ case et de l'opposé de b. De 9 en 9, ceci conduit ici, après -32 à -23, -14, -5, 4, 13 : on s'arrête quand on trouve un nombre entre 11 et 19. On trouve alors $a=13$.

Option 2 : on ajoute b au nombre simplifié obtenu à la case 15 : $8a+8b+b=8a+9b$. En simplifiant à nouveau, on obtient $8a$, ce qui nous ramène à la situation du premier tour (option 1).

*
* *

Fiche de mathémagie nº 3

Un tour en or

Ce dernier tour de magie est encore plus étonnant que les deux précédents.

Le tour

Le magicien a préparé sur une feuille de papier une rangée de 15 cases vides dans lesquelles des nombres seront écrits par son spectateur préféré :

Le spectateur est invité à penser à deux nombres entiers compris entre 1 et 19 au sens large (distincts ou non) puis, en cachette du magicien, à les écrire dans les deux premières cases de gauche. Ensuite, à partir de la troisième case, il doit écrire dans chaque case le total des nombres des deux cases précédentes. Le spectateur utilise ensuite une calculatrice mise à sa disposition pour calculer le quotient du dernier terme à droite par l'avant-dernier terme.

Le magicien déclare alors qu'il a eu une vision la nuit précédente et que le résultat de cette division commence par $1{,}618$: le spectateur confirme cette affirmation extraordinaire ! Aucune indication n'a été donnée cette fois au magicien, et pourtant, grâce aux mathématiques, il a réussi son exploit.

Le « truc » du mathémagicien

Il n'y en a pas ! Le magicien annonce un résultat qu'il a mémorisé à l'avance : $1{,}618$, et qui est en fait valable pour toute suite choisie par le spectateur. C'est pourquoi ce tour ne doit être fait qu'une seule fois avec un même public.

Explication mathématique

Si on complétait la ligne par une deuxième ligne en-dessous, avec les résultats des quotients de chaque terme par le précédent, on verrait ces quotients s'approcher de $1{,}618$. La propriété de convergence vers le nombre d'or de la suite historique de Fibonacci est valable aussi pour des suites d'entiers commençant différemment mais vérifiant la propriété $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ (on les appelle suites de Fibonacci généralisées).

Voici notre exemple :

u_n	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1 364	2 207	3 571	5 778
$\frac{u_n}{u_{n-1}}$		1,571 43	1,636 36	1,611 11	1,620 69	1,617 02	1,618 42	1,617 89	1,618 09	1,618 01	1,618 04	1,618 03	1,618 04	1,618 03	1,618 03

Selon les deux valeurs choisies au départ, les valeurs $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ du quotient d'un terme par le précédent se rapprochent plus ou moins vite, quand on augmente n, d'une valeur commençant par $1{,}618$. De plus, elles encadrent alternativement en-dessous et au-dessus la valeur du nombre d'or. Ici, c'est à partir de $\frac{u_9}{u_8}$ que le quotient vaut $1{,}618\ldots$ mais parfois il faut pousser les indices plus loin. Avec la précaution d'avoir quinze nombres écrits, dans le cas de deux nombres quelconques strictement inférieurs à 20 choisis au départ, le magicien s'est assuré (pour $19 \times 19 = 361$ cas, étudiés dans un tableur) que $\frac{u_{15}}{u_{14}}$ vaudra toujours $1{,}618\ldots$ Rappelons que le tour ne doit pas être répété, car la prédiction conduit à coup sûr à $1{,}618$, et ce quel que soit le choix des deux nombres de départ par le spectateur.

Enseignant de mathématiques aujourd'hui retraité, Dominique Souder se consacre désormais à des animations et formations autour de la magie mathématique. Son livre, *Tours de magie et suites de Fibonacci* (80 pages), est disponible sur les plateformes habituelles diffusant les ouvrages numériques en format ePub (Decitre, Kobo, Amazon, Apple-books, etc.). Site : .

dominique.souder@gmail.com